И. В. Арнольд

Принципы отбора и составления арифметических задач

Москва
Издательство МЦНМО
2008

УДК 51.07
ББК 74.262.21
А84

Арнольд И. В.
А84 Принципы отбора и составления арифметических задач. — М.: МЦНМО, 2008. — 45 с.

ISBN 978-5-94057-425-5

В брошюре воспроизводится статья член-корреспондента АПН РСФСР Игоря Владимировича Арнольда об основных положениях, из которых следует исходить при отборе и составлении текстовых задач в курсе математики средней школы.

ББК 74.262.21

Текст воспроизводится по статье:
Арнольд И. В. Принципы отбора и составления арифметических задач // Известия АПН РСФСР. 1946. Вып. 6. С. 8—28.

ISBN 978-5-94057-425-5

Содержание

Что такое арифметика?

Б. Л. Пастернак писал, что «заготовленные неожиданности скучнее арифметических задач». Идея, будто арифметические задачи — образец скучности, не случайна: многочисленные сборники их полны отупляющих упражнений в применении заранее заготовленных рецептов, не предполагающем ни умственных усилий, ни какого-либо интереса к обсуждаемым вопросам (и к их ответам).

Простейшим путем избежать этой нудной потери времени, во время которого, как говорил Маяковский, «ведь растет человек — глуп и покорен», является полная отмена арифметики в школе (а «ежесекундно извлекать квадратный корень», как продолжил свою мысль Маяковский, мог бы и компьютер).

Предлагаемая книжка защищает другой путь — арифметические задачи таят огромные возможности для того, чтобы научить решающих их школьников *самостоятельно думать*, анализируя неочевидные жизненные ситуации, приходя к *пониманию* первопричин разных явлений природы и жизни (а также к *оценке* возможных последствий принимаемых решений).

Дело в том, что за одной и той же (и даже иногда простой) математической процедурой скрываются порой совершенно разные жизненные ситуации, и арифметические задачи — прекрасный путь к умению в этих ситуациях разбираться.

Вот ряд таких задач (из пары десятков примеров со страниц книги 21—23, посвященных одной и той же процедуре):

— сколько из трех яблок останется, если съесть одно из них?

— сколько распилов делят бревно на 3 части?

— на сколько число братьев в Таниной семье больше числа сестер, если у Тани на 3 брата больше, чем сестер?

— сколько сотен лет назад основан университет, который будет через 100 лет праздновать свой трехсотлетний юбилей?

Трудности этих четырех несхожих вопросов совсем разные. Хотя все они решаются «одинаково», догадаться об этом нелегко.

Не стану утомлять читателя другими иллюстрациями формулы $3-1=2$: в книге он найдет и их, и десятки более трудных арифметических задач. Эти задачи, по моему опыту, легче даются дошкольникам, чем школьникам, а школьникам легче, чем студентам, превосходящим в этом, впрочем, своих профессоров.

Фигаро недаром говорил, что его работа требует ежедневно «больших умственных усилий, чем управление и Гренадой, и Севильей вместе». Точно так же приведенные ниже арифметические задачи учат куда большему, чем сложение пятизначных чисел столбиком (или чем то вычитание единицы из тройки, которое решает приведенные выше 4 задачи).

Из стакана с красным вином перелили ложку в бочку с белым вином, а потом такую ложку (плохо перемешанной) смеси перелили обратно в стакан. Чего больше в результате: красного вина в бочке белого или белого в стакане красного? (См. с. 25.)

В заключение приведу еще другую арифметическую задачу (где дошкольники обгоняют нобелевских лауреатов, как я проверил экспериментально):

— книжный червь прогрыз (кратчайшим путем) от первой страницы стоявшего на полке первого тома Пушкина до последней страницы стоявшего рядом второго. Страницы каждого тома составляют (в толщину) 2 сантиметра, а каждая обложка — 2 миллиметра. Какое расстояние прогрыз червь?

Ответ в этой задаче (4 миллиметра!) столь неожидан, что родители решивших ее дошкольников неспособны обычно ни найти его, ни понять (я посоветовал бы затруднившемуся читателю нарисовать чертеж, как выглядят соседние тома, стоящие рядом на полке). Декарт запретил в математике чертежи, чтобы сделать подобные задачи недоступными.

Хотя предлагаемая книжка адресована не решателям задач, а их составителям, школьники (не боящиеся пропускать мимо ушей философские обобщения уже понятых ими очевидных доводов) тоже сумеют её использовать: эта книга учит разбираться в жизни больше, чем в хитросплетениях псевдонаучной болтовни.

Написавший эту книгу математик, мой отец Игорь Владимирович Арнольд (1900—1948) был первым доктором педагогических наук в СССР и членом-корреспондентом Академии педагогических наук.

В год его смерти мне исполнилось 11 лет, но я ничему математическому у него не научился: он обучал меня скорее альпи-

низму и любви к дальним странствиям, резьбе по дереву и строительству шалашей, рыбной ловле и лыжам.

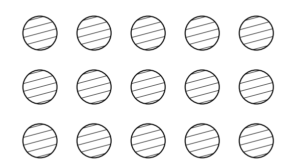
А когда я пытался узнать от него, почему в школе учат, будто произведение минуса на минус есть плюс, то этот ученик алгебраиста Эмми Нётер ответил так: «Вещественные числа удовлетворяют аксиомам кольца (например, что $(a+b)c = ac + bc$), а если бы произведение минуса на минус не было плюсом, то эта аксиома дистрибутивности нарушалась бы».

Я никак не мог понять: а зачем мне нужно, чтобы выполнялись аксиомы? С тех пор я сохраняю полное неприятие всех дедуктивно-аксиоматических картезиански-декартовских построений как антинаучной болтовни, противоречащей естественнонаучному подходу, основанному на экспериментах.

Для себя я понял правило знаков $(-)\cdot(-) = (+)$ только год спустя, решая такую задачу: «Прилив в городе N был сегодня в полдень. Когда он будет завтра?»

Длительности суток и месяца позволяют легко сообразить, что разница составит около 50 минут. Но будет ли прилив на 50 минут раньше полудня или позже его, позволяет определить только правило знаков (если знаешь, что вращение Земли происходит «с запада на восток» и вокруг оси, и вокруг Солнца).

Арифметика — самый короткий путь к пониманию природы, так как имеет дело с самыми простыми, самыми фундаментальными экспериментальными фактами (например, что пересчёт камней «по строкам» и «по столбцам» всегда приводит к одному результату):

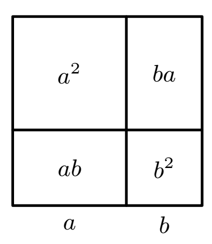


$$5+5+5 = 3+3+3+3+3.$$

Именно эти *экспериментальные факты* и составляют базу арифметики (называемую алгебраистами «набором аксиом»: $ab = ba$ и т. д.).

Способность нашего мозга к *обобщению* таких наблюдений сродни выработке условных рефлексов Павлова у собак. Например, разрезая (вслед за Жан-Жаком Руссо) квадрат со стороной

длины $a+b$ на четыре прямоугольника, мы получаем начинающую «бином Ньютона» алгебры арифметическую теорему



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

так что простые арифметические задачи — кратчайший путь ко всей математике и ко всему естествознанию.

В. И. Арнольд

§ 1. Постановка вопроса

Арифметические задачи, если исключить имеющие характер простых упражнений в производстве арифметических действий, преследуют довольно разнообразные и притом не слишком определённые цели. Имеется в виду и закрепление теоретического материала курса арифметики, и ознакомление с простейшими зависимостями между величинами, и тренировка сообразительности учащихся, развитие у них умения ориентироваться во всё более и более сложных «арифметических ситуациях». Однако более точно эти цели никогда не фиксировались, подбор и расположение задач определяются до сих пор в значительной мере исторической традицией: нет никаких твердо установленных принципов, которые позволили бы судить о том, что именно должно быть достигнуто, в каком порядке, какой степени сложности задачи должны решаться, каковы должны быть тематика и оформление задач, в какой связи эти задачи должны быть с другими частями курса математики, какие требования следует предъявлять к подбору числовых данных и т. д.

По всем этим вопросам в методической литературе можно найти довольно разноречивые указания весьма расплывчатого характера, в практике же преподавания встречается самое разнообразное разрешение этих вопросов как в программах, так и в содержании соответствующих учебных пособий.

Уже в дореволюционное время в среде наиболее активных и прогрессивных деятелей русской начальной и средней школы росли и крепли течения, стремившиеся отразить в практике преподавания те тенденции к обновлению материала и методов преподавания, которые с необходимостью вытекали из чрезвычайно быстрого количественного роста математических дисциплин и резкого увеличения удельного веса математических методов в современном естествознании и технике. С особенной остротой эти задачи возникают перед советской школой, призванной, в невиданных доселе масштабах, осуществить необходимую для овладения современной наукой и техникой подготовку

работников первого в мире социалистического государства. Для советской школы, поэтому, совершенно нетерпимо такое положение, при котором как содержание, так и методы преподавания математики и, в частности, основы основ — арифметики, сохраняют ещё следы застывших и устаревших схем и традиций и не приведены в достаточно полное и точное соответствие с потребностями современности. Положение осложняется ещё тем, что конкретные условия обучения, его массовость и унификация требуют особенно осторожного подхода при внесении не только значительных, но даже и сравнительно небольших изменений. Но именно массовость и унификация преподавания обязывают произвести тщательный пересмотр материала с тем, чтобы, освободившись от всего того, что в настоящее время является излишним балластом, заполнить остающееся время и место действительно насущно необходимым материалом, без которого преподавание арифметики будет лишь в очень неполной мере разрешать стоящие перед ним задачи.

Мы позволим себе сослаться для сравнения на разработанность методики преподавания таких предметов, в которых наличие или отсутствие нужных навыков констатируется не по косвенным признакам (недостаточная подготовленность к дальнейшему обучению, беспомощность в решении практических вопросов), а непосредственно очевидно. Сюда относится, например, обучение музыкальной технике или иностранному языку. Здесь с чрезвычайной тщательностью подобраны и составлены упражнения самого различного типа, известно, для чего они нужны, как их нужно дозировать, что должно быть достигнуто в результате. Изучены часто встречающиеся ошибки и дефекты исполнения (или — в случае обучения языку — дефекты произношения, словоупотребления и т. д.) и придуманы специальные упражнения для устранения этих дефектов. Достаточно сравнить любые два пособия, любые два методических руководства для того, чтобы убедиться, что в этом отношении арифметика плетётся в хвосте, хотя здесь-то и надо бы потребовать наиболее тщательной и продуманной методической детализации.

Итак, мы считаем, что для того чтобы в сложившихся у нас условиях правильно подойти к разрешению частного вопроса о содержании, форме и расположении арифметических задач, необходимо (учитывая весь имеющийся в распоряжении опытный материал и общие задачи математической подготовки учащихся советской средней школы в современных условиях) устано-

вить с достаточной полнотой и определённостью, *какие именно частные цели должны быть достигнуты в результате соответствующей работы учащихся над решением арифметических задач*.

Несмотря на то, что такой тезис может показаться трюизмом, на деле, в конкретном применении к арифметическому материалу, он оказывается далеко не тривиальным, так как подобного рода работа, насколько нам известно, у нас ещё не была проделана с необходимой тщательностью. Отдельные, «не претендующие на исчерпывающую полноту» экскурсии в эту область почти бесполезны — здесь нужна именно «претендующая на полноту» работа. Автор настоящей статьи не претендует на производство этой работы во всём её объёме (да и вряд ли силами одного человека может быть достигнута нужная степень объективности). Имеется в виду лишь более скромная цель — наметить те основные положения, из которых, по мнению автора, следует исходить при отборе и составлении задач по курсу арифметики, в особенности на позднейших стадиях обучения.

§ 2. О требованиях, которые следует предъявить при отборе и составлении арифметических задач

Попытаемся прежде всего конкретизировать характер тех требований, которые мы считаем необходимым предъявлять к содержанию арифметических задач, входящих в обязательный минимум. Подчеркнём, что общее число задач, которые каждый учащийся должен решить в процессе обучения, не так-то уж велико. Поэтому уместно потребовать, чтобы каждая задача (ведь с ней могут встретиться несколько миллионов учащихся детей!) была настолько полноценной во всех отношениях, что можно было бы обосновать и защищать её право на миллионный тираж. Нам кажется, что эти требования вполне естественны в отношении каждой задачи, включённой в сборник упражнений для начальной и средней школы. Авторы задач должны были бы, в идеале, быть в состоянии ответить на вопросы, скажем, такого типа:

— Какую цель преследует данная задача? Какие именно элементы арифметического обучения, воспитания и тренировки мысли имеются в виду? Необходимо ли помещение именно этой задачи в сборник для этих целей? Почему именно такие, а не другие конкретные величины, именно такая, а не другая «фабула» задачи выбраны? Почему такие, а не другие числовые данные? Отвечают ли они реальной обстановке, в которой могло бы понадобиться решать такую задачу? Интересна ли фабула задачи для учащихся, увлекательна ли, естественна ли постановка вопроса, вызывает ли она у учащихся интерес к ответу или к способу решения, чем именно? Нельзя ли этот интерес повысить? Когда именно учащийся сможет самостоятельно решить данную задачу, что он для этого должен помнить, знать, уметь, представлять себе? А если он не сможет этого сделать, о чём это свидетельствует? Чем и в какой мере ему должен помочь учитель и чего он должен добиваться от учащегося? Как

эта задача связана с предшествующей и последующей работой учащегося, почему она помещена именно в этом месте сборника, а не в другом? и т. п.

Может показаться, на первый взгляд, что эти требования к составителям задач чрезмерны. Есть, скажут, сборники задач: научите детей решать эти задачи, — и всё будет ладно, а в деталях учитель разберётся. Но мы хотим подчеркнуть, что одна из основных целей настоящей статьи — показать, во-первых, насколько такая традиционная терпимость к бросающимся в глаза дефектам преподавания недопустима, к каким последствиям она ведёт, и, во-вторых, наметить пути к устранению этих дефектов.

§ 3. Фабула задачи и выбор числовых данных

Начнём с вопроса, в разрешении которого рутинность проявляется на практике с особенной рельефностью и в отношении которого сравнительно легко указать, что здесь необходимо предпринять. Мы имеем в виду фабулу или оформление задачи, естественность постановки вопроса и подбора числовых данных. Принято считать, что всё это имеет второстепенное значение, что суть дела в арифметическом содержании задачи, в тех усилиях воображения, в том процессе логического рассуждения, в тех числовых выкладках, которые предлагаются учащемуся, а вовсе не в степени реальности содержания задачи. Даже если в принципе с этим тезисом и можно было бы согласиться, всё же только что высказанные утверждения не являются достаточным основанием для того, чтобы отбрасывать всякую заботу о фабуле задачи.

Отсутствие заботы о фабуле приводит, в итоге, к нагромождению задач с искусственными, подчас прямо смехотворными, условиями, лишь по чисто внешним признакам имеющим реальную оболочку. Хуже всего то, что обилие задач, заставляющих учащегося на протяжении нескольких лет обучения пережёвывать один и тот же традиционный материал, неминуемо навевает скуку, переходящую в отвращение к арифметике, в особенности, если обучение и по существу сводится к навязыванию учащимся рецептов и неукоснительных бюрократических правил арифметической бухгалтерии — записи хода решения и т. д.

Необходимо здесь подчеркнуть, что мы вовсе не собираемся совершенно отказываться от общеизвестных типов арифметических задач (задачи с путешественниками и поездами, встречающими и догоняющими друг друга, задачи на «бассейны», на «смешение» и т. п.). Эти классические задачи представляют собой достаточно наглядные и удобные *схемы* тех арифметических ситуаций, в которых должен уметь ориентироваться учащийся.

Но нельзя ограничиваться этими задачами-схемами и вращаться в кругу одной и той же, очень скоро приедающейся, тематики. Иначе не избежать искусственных постановок вопроса и нудного повторения одних и тех же мотивов. С другой стороны, внося разнообразие в оформление и тематику задач и стремясь к возможно большему приближению к действительности используемых соотношений между данными и искомыми задачи и к соответственному выбору числовых данных, нельзя, конечно, перегибать палку и загромождать текст задачи такими техническими и статистическими данными, которые порождают для учащихся дополнительные трудности. Но эта последняя опасность сейчас меньше первой, — линия «наименьшего сопротивления» проходит именно там, а не здесь.

Если бы нельзя было нужное арифметическое содержание задачи облечь в более живую форму, подобрать интересное, конкретное и вместе с тем доступное для учащихся оформление, достигающее — в отношении умственной тренировки и воспитания арифметических навыков — нужные целей, тогда, конечно, пришлось бы мириться и с этим. Но всё дело в том, что почти всегда такое оформление найти можно, и если это не делается, то только потому, что легче переписать из составленных раньше сборников условия задач, слегка их осовременив, нежели подумать о том, как оформить задачу с соблюдением указанных требований. Я уже не говорю о том, что и над вопросом о нужном арифметическом содержании часто составители сборников не слишком-то задумываются.

Для иллюстрации приведём несколько примеров, взятых из применяющихся у нас сборников задач.

«У хозяйки было на руках $7^3/_8$ руб.»

«Продано $3^{17}/_{19}$ кг сахара, по $2^1/_7$ руб. за килограмм».

«Заяц в 1,35 часа пробегает 14,13855 км».

Совершенно смехотворный выбор числовых данных здесь не нуждается в комментариях. И такие задачи — не редкость. Составители сборников иногда ссылаются на то, что «иначе трудно составить задачи, требующие действий с обыкновенными и десятичными дробями». Даже если это и верно, то такой аргумент был бы приемлем лишь в устах тех, кто не составляет сборников задач.

Рассмотрим задачи, которые не содержат таких бросающихся в глаза нелепостей и представляются нам в достаточной степени типичными.

«В 3 рощах 4160 берёз. Сколько берёз в каждой роще, если в первой в 3 раза больше, чем во второй, а в третьей столько, сколько в первых двух вместе?»

Как будто бы возразить нечего. Но всё же, — что это за странные рощи, с таким точным соотношением числа берёз? И разве не ясно всякому, что число берёз в каждой роще должно было бы быть заранее сосчитано, так как иным путём сравнить число берёз в них нельзя. В итоге — совершенно нереальная, если вдуматься — просто комическая, постановка вопроса, которая не может вызвать никакого интереса к ответу.

«Два бидона вмещают $10\frac{1}{2}$ л. Если бы вместимость первого была в два раза больше, а вместимость второго на 8 л больше, чем в действительности, то общая ёмкость удвоилась бы. Какова ёмкость каждого?»

Мы намеренно приводим безобидные, на первый взгляд, задачи. Все так привыкли к нелепому и скучному тексту, что не склонны видеть в задачах подобного рода ничего предосудительного. Но присмотритесь внимательней. Чем мотивировано условие задачи? Почему это всё так? Почему точно в два раза больше? Почему удвоится? В какой реальной обстановке могла бы встретиться необходимость решать такую задачу?

«1365 книг составляют 35 % всех книг школьной библиотеки. Все библиотечные книги размещены в трёх шкафах, причём количества их относятся как $3\frac{1}{2} : 1{,}25 : 1\frac{3}{4}$. Сколько книг в каждом шкафу?»

Интересно и реально, не правда ли?

«Школьник издержал сначала $\frac{3}{14}$ своих денег на покупку писчебумажных принадлежностей, потом $\frac{5}{11}$ остатка на покупку учебников и у него осталось четырьмя рублями меньше того, что он издержал в оба раза. Сколько денег было у школьника?»

Одна формулировка чего стоит!

«Из колхоза в город, до которого 48 км, отправились одновременно колхозник на лошади со скоростью 7 км в час и письмоносец на велосипеде со скоростью 13 км в час. Через сколько часов остаток пути до города для письмоносца будет в 3 раза меньше, чем остаток пути до города для колхозника?»

Трудно себе представить, чем мог бы быть обусловлен интерес к получению ответа на вопрос задачи. Тематика лишь внешне связана с современностью. С тем же основанием можно было бы отправить рыцаря на лошади и гонца бегом, — оформление,

может быть, стало бы для ребят забавнее, но постановка вопроса от этого не стала бы лучше.

И вот подобного рода задач — сотни, и детей держат на таком «арифметическом рационе» на протяжении нескольких лет.

Должно признаться, что в прошлом авторы задачников проявляли больше заботы о реальности условий и осмысленности постановки вопроса в задачах. Фигурирующие в классических задачах вопросы о купцах, смешивающих вина для получения прибыли, курьерах и путешественниках, землекопах и рабочих, мостящих равномерно улицу, от которых сейчас веет даже известной романтичностью, — действительно в своё время отражали реальность.

Насколько реально представляли себе условия задач прежние авторы, свидетельствуют следующие два примера, извлечённые из руководств по алгебре начала XIX в.:

«Шлюпка идёт по Неве и переходит в 48 мин от Кадетского корпуса до Литейного двора, а оттуда возвращается в 32 мин, причём гребцы в оба конца гребли с одинаковой силой; спрашивается, скольким саженям равняется течение Невы в 1 мин и сколько сажен шлюпка перейдёт в то же время в стоячей воде?»

Автор даже не считает нужным указать расстояние от Кадетского корпуса до Литейного двора, только в решении используется, как известный факт, что это расстояние «есть 1536 сажен». Такое «упущение» в современных задачниках едва ли было бы возможным.

«На вопрос о возрасте одна дама ответила: мой возраст таков, что если его возвысить в квадрат или умножить на 53 и из результата вычесть 696, то получается одно и то же».

Условие, конечно, не слишком реально, но как к нему относится автор? Решая квадратное уравнение, он замечает: «так как вопрос касается возраста дамы, то из вежливости нужно перед радикалом взять нижний знак».

Вот несколько задач из сборника 1868 г.:

«В аптеке заказан зубной порошок по следующему рецепту: на 2 драхмы растёртого в порошок красного сандального дерева взять 1 скрупул 10 гранов растолчённых квасцов, 4 драхмы растёртой в порошок лихорадочной корки, одну каплю лимонного и одну каплю гвоздичного масла. По ошибке аптекарский ученик взял 2 капли лимонного масла и 2 скрупула 8 гранов квасцов. Сколько к полученной смеси должно прибавить каждого из озна-

ченных веществ, чтобы между ними сохранилось предписанное отношение?»

И здесь постановка вопроса вполне реальна. Правда, с «драхмами» нам, пожалуй, уже нечего делать, но то, что учащихся не знакомят ни с какими мерами, кроме метрических, это просто нелепо. Между тем в газетах можно встретить ярды, мили и другие названия, и учащимся очень полезно приобрести умение переводить эти меры в метрические, да, кстати, и на практике ощутить преимущества метрической системы мер по сравнению с теми, которые до сих пор применяются в Англии.

Когда автор задач имеет в виду реальность, он не боится деталей:

«Купец в Берлине купил 10 000 заячьих мехов, весом в $77\frac{1}{2}$ пудов, за 115 рублей каждую тысячу; сверх того, он заплатил таможенных пошлин по 2 руб. 60 коп. с пуда, за укладку и доставку — 6 рублей с 1000 рублей, браковщику — 4 руб. с 1000 рублей, за доставку в Кронштадт — 8 рублей, за пересылку писем — 7 руб. 15 коп., за мелкие расходы — 1 %, комиссионеру — 2 %, за вексель и гербовую бумагу — $\frac{5}{8}$ %. Сколько талеров стоят купцу меха в Берлине, когда $107\frac{1}{2}$ талеров равны 100 рублям?»

Вот ещё задача из того же сборника:

«Часы с будильником, которые за 12 ч 35 мин отстают на 15 мин, должно ставить в 10 ч 40 мин вечера по выверенным часам так, чтобы будильник действовал в 4 ч 30 мин утра следующего дня. На сколько минут после цифры X циферблата должно поставить минутную стрелку, если указатель будильника поставлен на 4 ч 30 мин?»

В других задачах использованы сведения о материалах, необходимых для огрунтовки стены («$5\frac{1}{2}$ фунтов мелу плавленого, $\frac{1}{5}$ фунта клею и $\frac{2}{5}$ штофа молока»), о выходе «железняку, красного и алого кирпича» из «сырца», о материалах, применяемых при закладке фундамента («3540 кирпичей на кубическую сажень с прибавкой $\frac{1}{20}$ на излом») и т. д.

Не меньше заботы о реальности тематики проявлено и в «Собрании арифметических задач» Воронова (1876):

«Определить вес сажени однополенных годовалых сосновых дров, зная, что вес свежего соснового дерева составляет 90 % веса воды того же объёма; вес годовалой сосны $\frac{9}{11}$ веса свежей сосны; кубическая сажень воды весит 593 пуда; сажень однополенных дров $=\frac{1}{4}$ кубической сажени, а древесная масса

(по причине промежутков между поленьями) занимает в среднем $^{14}/_{27}$ пространства, занятого дровами».

«В одной деревне Нижегородского уезда большая часть жителей занимается выделкой топоров. Определить среднюю прибыль, выручаемую там с одного топора, полагая, что на него идёт $^{1}/_{20}$ пуда железа, что на выковку пуда железа расходуется четверть угля и $^{1}/_{5}$ пуда стали, что пуд железа покупается по 1 руб. 50 коп., пуд стали — по 3 руб. 20 коп., четвертной куль угля — по 1 руб. 25 коп., а средняя цена топора при оптовой продаже — 40 коп.».

«В Кадниковском уезде Вологодской губернии для добывания смолы крестьяне устраивают заводы об одной или нескольких печах. Вычислить средний ежегодный доход с завода о двух печах, полагая, что в печи 4 куба, из которых каждый даёт в сутки $^{3}/_{4}$ пуда смолы из $^{1}/_{16}$ куб. сажен осмола (сосновых пней), причём на выкурку бочки смолы в 30 пуд. расходуют 2 воза дров, а по местным ценам пуд смолы стоит 1 руб., куб. сажень осмола — 6 руб., воз дров — $12^{1}/_{2}$ коп.».

Конечно, и сейчас возможно всю необходимую арифметическую тренировку учащихся производить на задачах, в достаточной степени реальных, с интересным условием и числовыми данными, и с такой постановкой вопроса, при которой само получение ответа не было бы для учащихся эмоционально безразличным. Нас окружают разнообразнейшие и интереснейшие явления действительности. Любопытнейшие взаимоотношения вещей и явлений находят своё яркое отражение в числах. Неужели же нельзя из этого богатейшего материала извлечь числовые данные, доступные детям и интересные им, построить преподавание так, чтобы постепенно открывать перед ними всё новые и новые страницы «мира в числах», разумно используя числовые данные в предлагаемых им задачах?

Первым шагом в этом направлении должно быть составление соответствующего справочника. Здесь необходимо, прежде всего, просмотреть техническую справочную литературу, относящуюся ко всем видам транспорта (со всеми числовыми характеристиками: скорости, грузоподъёмности, размеров, норм потребления горючего, мощности машин, рекордных достижений и т. д.), собрать материал вплоть до фотографий соответствующих объектов, с точным указанием названий, места и времени характерных событий и т. д. К этой работе надо привлечь специалистов, которым не так уж трудно поделиться тем, что может

оказаться полезным, интересным и, вместе с тем, доступным школьнику. Не менее богатый материал можно почерпнуть из физической географии, физики, химии, астрономии, из экономической географии (не увлекаться «сухой» цифровой статистикой и тривиальными сопоставлениями, а выбирать интересные, расширяющие числовой кругозор и действующие на воображение данные!), из современной технологии (состав различных часто встречающихся веществ, способы их получения, различные виды топлива, сорта стали и т д.). Актуален обильный материал, характеризующий в самых разнообразных отношениях войны далёкого и недавно прошлого (состав и численность войск, техническая оснащённость, быстрота передвижения, количество затраченных материалов и т. д.). Практический интерес могут представить расчётные задачи сметного характера с данными, отвечающими действительности (подсчёт нужного количества горючего для тракторного парка, для снабжения грузовых машин, количества и стоимости материала и его доставки с оплатой рабочей силы и т. п.). Задачи этого последнего рода должны по возможности точнее отражать реальную обстановку — числовые данные и детали могут в них меняться время от времени и от места к месту.

Таким образом, требования, которые надлежит предъявлять к арифметическим задачам в отношении их фабулы, осмысленности постановки вопроса и подбора числовых данных, представляются достаточно определёнными. Путь, следуя которому обычные дефекты можно устранить, также достаточно ясен, хотя и предполагает довольно кропотливую и трудоёмкую работу.

Несравненно более сложным, по самой природе своей, представляется вопрос об арифметическом содержании задач, к которому мы сейчас и перейдём.

§ 4. Арифметическое содержание задач

В практике преподавания дело обстоит так. За основу принимается один или несколько сборников задач, из которых преподаватель выбирает те или иные по своему усмотрению. Традиция обеспечивает в известной мере то, что некоторые определённые типы «арифметического рассуждения» будут как-то представлены, но что это за типы, достаточны ли они или, наоборот, в обычном материале есть лишний балласт, чего именно надо добиваться от учеников, — на всё это не даётся сколько-нибудь определённого ответа. Более или менее «установлено», что учащихся надо научить решать задачи на «смешение», на «пропорциональное деление», на «совместную работу», на «движение», на «проценты», на «тройное правило». Если спросить о методах решения, то ответ ограничивается обычно тривиальными соображениями об аналитическом и синтетическом методе, о разложении сложной задачи на ряд простых, о способе приведения к единице, о способе пропорций, о задачах на «предположение» («предположим, что каждого сорта куплено одинаковое количество»). Учеников — в том или ином порядке — знакомят с соответствующими «типами» задач, причём обучение решению задач сплошь и рядом сводится к рецептуре и «натаскиванию», к пассивному запоминанию учениками небольшого числа стандартных приёмов решения и узнаванию по тем или иным признакам, какой из них надо применить в том или ином случае. Количество задач, которые ученики решают действительно самостоятельно, с тем напряжением мысли, которое и должно являться источником полезности процесса решения задачи, ничтожно.

В итоге — полная беспомощность и неспособность ориентироваться в самых простейших арифметических ситуациях, при решении чисто практических задач, в дальнейшем, в алгебре — неумение составлять и исследовать уравнения и, вообще, неумение выйти за пределы узких формальных схем, — словом, то, что потом характеризуется как «отсутствие математического развития».

Наряду с этим встречаются и перегибы в другую сторону: в арифметику вводятся задачи с искусственным содержанием, которые, по существу, надо решать алгебраическим путём — после чего можно, хотя иногда и не без труда, «состряпать» и «арифметическое решение». Если подобного рода задачи не лишены элементов некоторой полезности, то их надо предлагать в порядке соревнования более сильным учащимся в математической стенгазете, в кружке.

Для устранения этих дефектов необходимо прежде всего отдать себе отчёт в том, какие же именно элементы (логического рассуждения, активной деятельности воображения, памяти, закреплённых большим количеством упражнений почти механических навыков и т. д.) должны составлять содержание «арифметического» воспитания и тренировки учащихся, в каких комбинациях, в какой последовательности эти элементы должны входить в задачи, какой степени трудности и сложности задачи должны войти в общеобязательный минимум. Ответ на вопрос должен учитывать как непосредственные потребности практики, так и основную задачу общего и математического развития учащихся, а также и подготовку к дальнейшему обучению в средней и высшей школе.

Существующие попытки классифицировать арифметические задачи по их тематике или по их алгебраической структуре (отметим сравнительно удачные схемы Александрова (1887), Воронова (1939) и Поляка (1944)) далеко не достаточны для этой цели. Здесь необходимо поставить вопрос в *полном объёме*, не ограничиваясь одной лишь *алгебраической структурой* задачи, т. е. характеристикой тех действий, которые надо выполнить для её решения. Одни и те же действия могут отвечать совершенно *различным конкретным ситуациям*, и учащийся может прийти к заключению, что надо выполнить данное действие, по совершенно различным основаниям.

Приведём в качестве примера несколько задач, решающихся действием

$$3 - 1 = 2.$$

1. Мне дали три яблока, я съел одно из них. Сколько осталось?

2. Трёхметровым шестом нащупали дно, причём над уровнем воды остался 1 м. Какова глубина?

3. Таня сказала: у меня на 3 брата больше, чем сестёр. На сколько в Таниной семье братьев больше, чем сестёр?

4. Час назад поезд должен был прибыть на станцию. Но он опаздывает на 3 часа. Когда он прибудет?

5. Сколько распилов надо сделать, чтобы распилить бревно на 3 части?

6. Я прошёл от первого столба до третьего. Расстояние между соседними столбами — 1 км. Сколько километров я прошёл?

7. Кирпич вместе с лопатой весит столько же, сколько 3 кирпича. Кирпич весит 1 кг. Сколько весит лопата?

8. Среднее арифметическое двух чисел равно 3, а их полуразность равна 1. Какова величина меньшего числа?

9. От нас до станции 3 км, а до Минухиных по той же дороге — 1 км. Сколько от станции до Минухиных?

10. Через сто лет мы будем праздновать трёхсотлетний юбилей нашего университета. Сколько сотен лет назад он был основан?

11. За 3 часа я проплываю 3 км в стоячей воде, а бревно вниз по течению — 1 км. Сколько километров я сделаю против течения за то же время?

12. Второго декабря было воскресенье. Сколько рабочих дней декабря предшествовало первому вторнику этого месяца?

13. Я иду со скоростью 3 км в час; мой приятель впереди меня ведёт свой мотоцикл со скоростью 1 км в час. Насколько сокращается расстояние между нами за один час?

14. Три одинаковых артели землекопов вырыли за неделю канаву длиной в 3 км. Сколько надо таких артелей, чтобы вырыть за то же время канаву, которая на 1 км короче?

15. Москва и Горький находятся в смежных часовых зонах. Который час в Москве, когда в Горьком — три часа пополудни?

16. При стрельбе по самолёту из неподвижного орудия надо было бы вынести прицел вперёд на 3 корпуса. Но орудие перемещается в направлении движения самолёта с втрое меньшей скоростью. На сколько корпусов надо вынести прицел вперёд?

17. Мой брат втрое старше меня. Во сколько раз ему было больше лет, чем мне сейчас, в тот год, когда я родился?

18. Если к числу прибавить единицу, то оно разделится на 3. Каков остаток от деления этого числа на 3?

19. Железнодорожный состав длиной в 1 км прошёл бы мимо столба за 1 мин, а через туннель при той же скорости — за 3 мин. Какова длина туннеля?

20. По двухколейному трамвайному маршруту курсируют с интервалами в 3 км три вагона. Один из них сейчас находится

на расстоянии 1 км от другого. Каково расстояние от третьего вагона до ближайшего к нему?

Эти примеры наглядно показывают, что обучение арифметике включает в качестве одного из *основных* элементов воспитание *умения ориентироваться в различных по своей конкретной приводе взаимоотношениях между величинами*. Самый метод «арифметического решения задачи» отличается от алгебраических приёмов в первую очередь тем, что на всех стадиях рассуждения все сопоставления и производимые действия допускают совершенно наглядное и конкретное, *осмысленное в области тех величин, о которых идёт речь, истолкование*.

Этим в известной мере определяется и отличие задач, для которых естественно потребовать арифметического решения, от таких по существу алгебраических задач, для которых это требование носит искусственный характер. Арифметическое решение задач последнего типа может быть рассматриваемо лишь как более высокая ступень тренировки, выходящая за рамки общеобязательного минимума. Во многих задачах зависимости между искомыми и данными таковы, что обычный безыскусственный ход рассуждения, естественно, приводит к соответствующим алгебраическим уравнениям. Между тем арифметический путь решения потребовал бы производства трудно удерживаемых в памяти, алгебраических по своей природе, операций над неизвестными величинами.

Это имеет, например, место при решении такой задачи: «Если продать 20 коров, то заготовленного сена хватит на 10 дней дольше, если же прикупить 30, то запас сена исчерпается 10 днями раньше. Сколько было коров и на сколько дней заготовлено сено?»

Отчётливых представлений о соотношениях между фигурирующими здесь величинами достаточно для того, чтобы без особого труда облечь условия задачи в форму уравнений. Но требовать, чтобы учащийся пришёл независимо от этого к формуле

$$(200 + 300) : 10$$

для определения числа дней, значит — стремиться достигнуть такой изощрённости в оперировании неизвестными величинами, которая практически не нужна, а в массовом масштабе недостижима.

Несколько более приемлема задача:

«Куплено на одинаковую сумму два сорта товара, первого сорта вдвое меньше, чем второго. Их смешали и продали половину смеси по цене высшего, остальное — по цене низшего сорта. Сколько процентов прибыли или убытка получено при продаже?»

Это, по существу, типичная задача, решающаяся введением произвольных единиц меры. Однако и при этом условии необходимое для решения оперирование неизвестными величинами носит здесь отчётливо выраженный алгебраический характер.

Наряду с этим часто встречаются задачи, в которых, наоборот, арифметический путь решения значительно проще алгебраического. Это может зависеть от двух причин. В одних случаях переход от известного к неизвестному настолько прост, что составление уравнений (переход от неизвестного к известному) внесло бы ненужную громоздкость, замедляющую процесс решения. Такова, например, задача, тематика которой — несмотря на общеизвестное значение изучения игр (в том числе и азартных) в истории математики — может оказаться препятствием к ее использованию в практике преподавания:

«A, B, C и D сыграли четыре партии, причём проигрывавший обязан был удваивать суммы, принадлежавшие остальным в начале партии. Проиграли последовательно A, B, C и D, и в результате у всех четырёх оказалось по 48 руб. Сколько было у каждого из них в начале?»

Вторая — классическая задача, интересная парадоксальностью формулировки условия. Этапы «синтетического» решения развёртываются в ней, как и в предыдущей задаче, в порядке, противоположном ходу описанных событий.

«Торговка яйцами продала первому покупателю половину всего числа имевшихся в её корзине яиц и ещё пол-яйца; второму покупателю — половину остатка и ещё пол-яйца, третьему — половину остатка и ещё пол-яйца, после чего у неё ничего не осталось. Сколько яиц было в корзине в начале?»

В других случаях составление уравнения требует проведения такого рассуждения, которое само по себе достаточно для достижения цели. Это — арифметические задачи в полном смысле этого слова: алгебраическое их решение не легче, а труднее и обычно сопряжено с введением лишних неизвестных, которые потом приходится исключать, и т. п. К их числу принадлежат большинство из задач, решающихся действием $3 - 1 = 2$, приведённых выше. Так, если, например, в задаче №3 обозначить

число братьев через x, число сестёр через y, то уравнение будет $x - (y - 1) = 3$, но если мы уже догадались, что надо написать $y - 1$ (сестра сама себя не считала), то и так ясно, что братьев не на 3, а только на 2 больше, чем сестёр. Приведём ещё несколько примеров.

«Я грёб вверх по течению и, проезжая под мостом, потерял шляпу. Через 10 мин я это заметил и, повернув и гребя с той же силой, нагнал шляпу в 1 км ниже моста. Какова скорость течения реки?»

«К моему приезду на станцию за мной обычно высылали машину. Приехав однажды на час раньше, я пошёл пешком и, встретив посланную за мной машину, прибыл с ней на место на 20 мин раньше обычного срока. Во сколько раз машина идёт быстрее, чем я пешком?»

Это очень хорошие арифметические задачи, но, конечно, на вхождение в «обязательный минимум» они претендовать не могут. Но как было отмечено выше, большое количество сравнительно простых задач принадлежит к той же категории *специфически арифметических задач*: позволительно думать, что такой характер задач в большинстве случаев свидетельствует об их высокой методической ценности — их специфичность ведь как раз и основана на том, что они требуют *ясного представления о соответствующей конкретной ситуации*, а не действий по заученным формальным образцам.

Вот ещё пример арифметической задачи, для решения которой не надо производить никаких «действий»:

«Из стакана с красным вином перелили в стакан, содержащий такое же количество белого, одну ложку. Перемешав, ложку смеси перелили обратно в первый стакан и повторили те же действия снова. Спрашивается, больше ли в итоге концентрация белого вина в красном в первом стакане или красного в белом — во втором?»

Для решения задачи достаточно задать себе вопрос: куда девалось то красное вино, которое вытеснено белым из первого стакана?

Подчеркнём попутно, что часто встречающийся при решении арифметических задач приём «предположения» (в классической формулировке: «предположим, что и того и другого было куплено одинаковое количество», или «предположим, что все вагоны — трёхосные», или «предположим, что в первый раз было куплено вдвое, а во второй раз втрое больше») мы причисляем

к числу *закономерных приёмов арифметического решения задач*, хотя в последней, например, из упомянутых формулировок, речь идёт — с точки зрения алгебраической — о решении системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Действительно, если разобраться в логической сущности этого приёма и в *психологических предпосылках его применения* в конкретных случаях, то мы увидим, что здесь речь идёт, по существу, об одном из наиболее часто применяемых законов бэконовской индуктивной логики в его элементарном количественном аспекте, притом тесно связанном с представлениями о *причинной обусловленности* замеченных особенностей числовых данных задач. В простейших случаях приводящий к указанным «предположениям» процесс анализа условий задачи как раз и начинается с вопроса «почему?». Почему такое расхождение в числовых данных, почему это вот больше и именно на столько? После того как в определённых конкретных случаях учащийся научился в итоге извлекать нужный количественный результат, совершенно естественным является стремление в более сложной ситуации, в случае совместного влияния нескольких факторов, изолировать действие одного из них; сравнить положение при наличии и при отсутствии этого фактора, компенсировать, исключить временно влияние остальных и, таким образом, вернувшись к знакомой уже, более простой ситуации, получить нужный числовой результат.

Это не алгебра, не приведение подобных членов и не «перенесение из одной части в другую с обратным знаком». Это как раз та логика, связанная с воображаемыми, но имеющими в области изучаемых величин вполне реальное значение операциями, развитие и совершенствование которой входит в прямые задачи арифметики.

Приведённое выше разграничение между арифметическими и алгебраическими по своему характеру задачами, как нам кажется, и в теоретическом, и в практическом отношении отвечает сущности дела, — вряд ли здесь можно в общем случае сделать больше: границы между задачами обоих типов по природе своей как бы несколько размытые, так как они зависят от количественных признаков, в оценке которых можно расходиться, подобно тому как нельзя провести грань между «несколькими зёрнами» и «кучей зёрен».

Аналогичное замечание относится и к характеристике арифметических задач по степени их *сложности*. Под этим мы бу-

дем понимать не трудность сопоставления данных, о которой шла речь выше, а наличие сравнительно громоздкого условия, требующего от решающего систематичности и внимательности в расчленении задачи на более простые и в соединении элементов рассуждения, каждый из которых учащемуся уже знаком, в единое целое. Не подлежит сомнению, что такие задачи (конечно, с естественным условием, а не в форме пресловутых «составных» задач, основанных на чисто внешнем и потому комическом соединении разнородных элементов) нужны именно как таковые, ибо развитие соответствующих *навыков ориентировки в сложной ситуации* составляет один из существенных элементов воспитания, имеющий немаловажное практическое значение. Кроме того, такие задачи могут служить контролем того, насколько твердо усвоены учащимися *элементы хода рассуждения*, так как здесь эти элементы играют роль *инструментов*, которые учащийся без колебания должен *выбрать* и *применить* в нужном случае.

Это умение должно в результате успешного преподавания распространяться и на такие случаи, в которых ситуация не принадлежит к числу подробно рассмотренных раньше и закреплённых серией однородных упражнений. Поэтому необходимо тактично, и вместе с тем повседневно (я не имею в виду моментов контроля), предлагать учащимся и такие задачи, которые требуют *ориентировки в новой, необычной для них ситуации, самостоятельного напряжения мысли*. Для развития этого умения надо вообще избегать догматизма и рецептуры при решении задач, а стараться так тренировать мышление и воображение учащихся, чтобы ход решения всегда возникал у них естественным путём. Задачи, предлагаемые для самостоятельной ориентировки (а не для закрепления разученного приёма), должны поэтому быть по силам среднему учащемуся, т. е. основываться на таких элементах логики и конкретных представлений, наличие которых можно предполагать у учащихся на данной стадии их развития.

Мы остановились на этих тривиальных методических соображениях потому, что здесь речь идёт об одном из наиболее существенных дефектов практики преподавания. Задачу — научить учеников владеть математическим инструментарием как в смысле умения производить элементарные операции, так и в смысле умения *выбирать нужный инструмент в нужном случае*, часто подменяют более легко достижимой целью — научить уча-

щихся применять эти инструменты в определённой, регламентированной, иногда довольно сложной последовательности, по определённым установленным правилам. Если бы так готовить к будущей деятельности, скажем, слесаря, то ему нельзя было бы доверить даже простейшего ремонта, простейшей починки, ибо всякая вещь портится по-своему и никаких правил порядка действий здесь установить нельзя.

Точно так же нельзя выучиться плавать, постоянно хватаясь за стенки бассейна или пользуясь плавательным поясом, — надо уметь самостоятельно держаться на воде, и в этом вся суть дела.

Приведём несколько задач, которые нам представляются полезными с этой точки зрения.

«В трёх палатках у продавщиц было поровну мандаринов. Когда каждая продала по 600 мандаринов, то у всех вместе осталось их столько, сколько было первоначально у каждой. Сколько же это?»

«Мне теперь втрое больше лет, чем было тогда, когда мой брат был в моём возрасте. Когда мне будет столько лет, сколько теперь моему брату, то нам вместе будет 96 лет. Сколько сейчас каждому?»

Арифметическое решение этой задачи требует отчётливых представлений о процессе совместного роста двух величин, о которых идёт речь, и об «этапах» этого роста. Вспомогательным средством может служить графическое линейное отображение условий задачи.

«Проезжая мимо станции, я заметил стоящий на станции товарный поезд из 31 вагона и услышал разговор смазчика со сцепщиком. Первый сказал: „105 осей всего пришлось проверить“. Второй заметил, что в составе много четырёхосных вагонов — втрое больше, чем двухосных, остальные трёхосные. На следующем перегоне я захотел, от нечего делать, подсчитать, сколько каких вагонов было в этом составе. Как это сделать?»

Арифметическое решение — проще алгебраического и требует отчётливого представления о том, что двухосные и четырёхосные входят в состав (в количественном отношении) определенными группами (по 4 вагона). Воображаемая «замена» всех вагонов трёхосными — обычный и хорошо знакомый учащимся приём. Задача допускает и теоретико-числовое (не однозначное) решение в случае, если число вагонов неизвестно.

«В двух библиотеках 50 000 томов. За год количество книг первой увеличилось на 5 %, а второй — на 6 %, так что общее

количество книг увеличилось на 2800. Сколько книг было в каждой библиотеке первоначально?»

Полезная задача, наводящая на представление о «весе», с которым надо учитывать процентные приращения, сливаемые в одно целое.

«Чтобы проплыть некоторое расстояние по течению на лодке, требуется времени втрое меньше, чем против течения. Во сколько раз скорость движения лодки больше скорости течения?»

Надо догадаться перейти от времени к расстояниям.

Аналогичная задача:

«Пароход идёт вниз по течению 2 часа, вверх — 3 часа. Сколько времени между теми же двумя пунктами вниз по течению проплывёт бревно?»

Ответы бывают самые фантастические — явный признак применения неподходящей «рецептуры».

«Поезд проходит 15 с мимо телеграфного столба и 45 с проходит туннель длиной в 450 м. При встрече с поездом, длина которого 300 м, оба поезда идут один мимо другого в течение 21 с. Найти скорость второго поезда».

Задача Л. Н. Толстого:

«Косцы должны выкосить два луга. Начав с утра косить большой луг, они после полудня разделились: одна половина осталась на первом и к вечеру его докосила, а другая — перешла косить на второй луг, площадью вдвое меньше первого. Сколько было косцов, если известно, что в течение следующего дня оставшуюся часть работы выполнил один косец?»

Это — одна из наиболее характерных задач рассматриваемой категории. Успех в решении зависит от того, насколько у решающего развито воображение и умение сопоставлять количественные отношения.

В заключение сделаем ещё одно замечание, касающееся использования материала задач на уроках арифметики (а также и алгебры).

Конечно, при начальном ознакомлении с каким-либо приёмом рассуждения или с какой-нибудь новой для учащихся областью соотношений можно рассматривать каждую задачу с определённой постановкой вопроса как законченный пример и стремиться — в понятных целях — к возможному качественному многообразию примеров при одном и том же арифметическом скелете рассуждения; на соответствующие элементы арифметического обобщения и абстракции следует даже, в надлежащее время,

обратить внимание учащихся. Но когда ученики владеют уже всеми основными приёмами рассуждения, достаточными для решения задач с данной тематикой, полезно использовать материал задач иначе, прибегая иногда к методу, который можно было бы назвать *монографическим*. Мы имеем в виду *варьирование постановки вопроса при изучении одной и той же зависимости между величинами*. Такое варьирование помогает учащимся объединить все относящиеся к данному объекту представления в одно целое, а преподавателю даёт возможность, во-первых, активизировать работу класса и, во-вторых, проверить и уточнить всю совокупность относящихся к данному вопросу элементарных арифметических навыков; очень полезно и попутное сопоставление различных приёмов решения одного и того же вопроса.

Пусть, например, предложено решить задачу.

«Смесь двух одинаковых объёмов воды и спирта занимает меньший объём, чем сумма объёмов обоих смешиваемых веществ. Литр такой смеси весит 936 г, между тем как литр чистого спирта весит 729 г, а литр воды — 1 кг. Сколько нужно взять воды и спирта, чтобы получить литр смеси?»

Здесь уместно рассмотреть предварительно или в связи с решением задачи, скажем, такие вопросы. Пусть при сокращении объёма какого-либо вещества единица объёма вместо 1 кг содержит 1,25 кг. Каково в процентах и в простых дробях увеличение веса единицы объёма? Уменьшение объёма в процентах к первоначальному? Как эти два показателя связаны между собой? Что надо знать, какие эксперименты произвести, какие числовые данные получить, чтобы их найти? Какие получатся процентные показатели, если говорить об обратном переходе (увеличении объёма и уменьшении массы)?

Как узнать, сколько нужно взять (по объёму, по массе) вещества в исходном состоянии, чтобы получить данное его количество (по объёму, по массе) в новом состоянии?

Рассмотреть эти задачи для случая перехода воды в лед и обратно, подобрать другие конкретные данные аналогичного типа (изменение объёма легкоплавких тел, расширение твёрдых тел при нагревании и т. п.). Если это отвечает моменту, то параллельно следует рассмотреть и соответствующие пропорции, заставив учащихся отчётливо формулировать, о какой пропорциональности здесь может идти речь. С этим, если обстоятельства позволяют, можно связать и вопрос о взаимоотношении процентов «со-ста», «на-сто» и «во-сто». Можно предложить допол-

нительно такие задачи: «Молоко подорожало на 20 %, а через неделю подешевело на 20 %: дешевле или дороже оно стало? В другом городе при той же начальной цене молоко сначала упало в цене на 20 %, а потом подорожало на 20 %. Каков результат по сравнению с ценой в первом городе?» Здесь можно проверить умение учащихся ассоциировать проценты с простыми дробями, возрастание какой-либо величины на p % с умножением на $1 + \frac{p}{100}$ и т. д., т. е. наличие у них чрезвычайно существенных и часто встречающихся в практических приложениях представлений. Для пояснения можно использовать здесь схематические диаграммы.

Полезно предложить учащимся составить небольшие справочные таблицы (для различных количеств льда, воды и т. п.), иллюстрировать их графически и т. п.

§ 5. Проблема методологической систематизации материала задач

Приведённые в предыдущем параграфе примеры различных задач показывают, что сравнительно нетрудно выделить в каждой задаче те элементы, которые определяют её дидактическую ценность. При этом, как особенно ясно показывает серия задач, решающихся действием $3 - 1 = 2$, основное внимание должно быть направлено не столько на «алгебраическую структуру» задачи, сколько на её конкретную оболочку, на то, в области каких величин и каким образом осуществлена данная «арифметическая ситуация». Именно от этого существенно зависит характер и степень отчётливости представлений учащихся, определяющие ход рассуждения при решении задачи.

Возвращаясь к сформулированной в начале § 4 основной проблеме *выделения* указанных элементов, мы можем в качестве необходимой предварительной работы указать на соответственное исследование материала уже составленных и испытанных сборников арифметических задач примерно в том же направлении, в каком мы вели изложение в § 4. Но такое опытное изучение фактического положения вещей, хотя и может служить отправной точкой для дальнейших построений, само по себе недостаточно, — уже по одному тому, что на этом пути нельзя выйти за рамки традиционного круга вопросов и согласовать материал задач с возросшими запросами действительности. Необходимо, следовательно, предпринять встречный анализ на основе общих методологических соображений. Этот анализ следует вести так, чтобы a priori предусмотреть различные возможные и необходимые элементы арифметических задач, хотя бы только с точки зрения того, что можно назвать *арифметической схемой* рассуждения.

Этот анализ придётся затем дополнить на основе того перечня часто встречающихся конкретных величин, о котором шла речь в § 3, и рассмотреть все соответствующие варианты подходящих «арифметических схем».

При таком подходе к вопросу область искомых построений фиксируется тем определением содержания и объёма учебного материала и той характеристикой основных целей преподавания арифметики, которое будет положено в основу. Для этого мы считаем достаточными следующие положения.

1. Основными целями преподавания арифметики в средней школе являются:

а) создание у учащихся *отчётливых представлений* и одновременно закрепление *твёрдых технических навыков*, относящихся к области *рациональных операций над рациональными числами*;

б) ознакомление учащихся с соответствующими *элементарными функциональными зависимостями между величинами* и основанными на указанных в п. а) представлениях и навыках методами решения относящихся сюда вопросов. Последнее должно быть осуществлено в качественном и количественном отношении так, чтобы дать достаточную подготовку для будущей специализации в процессе практической деятельности или дальнейшего обучения.

Присоединяя сюда ещё и характеристику изучаемых в арифметике функциональных зависимостей между величинами как таких, которые охватываются общим понятием линейной зависимости и простейшими свойствами обратной пропорциональной зависимости между величинами, и учитывая то, что было сказано о характерных особенностях арифметического метода решения задач, мы сможем сказать, что:

2. Основными целями решения «текстовых» арифметических задач в процессе обучения арифметике являются (наряду с общими задачами в п. 1, а и б):

а) создание и закрепление *отчётливых представлений, относящихся к конкретным случаям охарактеризованных только что зависимостей между величинами* (из числа наиболее доступных пониманию учащихся и практически важных);

б) воспитание умения *ориентироваться* в разнообразных возможных соотношениях между данными и искомыми величинами на основе *естественного хода логического рассуждения*, опирающегося на *диктуемые здравым смыслом соображения о взаимной обусловленности* соответствующих числовых данных;

в) создание и закрепление навыков *сопоставления и оперирования* с величинами, упомянутыми в п. а) основанных на

воображаемых, но в принципе возможных в данной конкретной ситуации действиях над ними.

Возникает вопрос о порядке проведения основанного на этих принципах методологического построения, о котором идёт речь, — составления перечня и систематизации *возможных арифметических схем и их конкретных осуществлений*, т. е. *элементов*, из которых состоят все арифметические конструкции, отвечающие указанным выше целям. Мы полагаем, что для достижения возможно большей полноты и общности эту работу надо вести не в порядке обычного расположения учебного материала, а в порядке, естественном с точки зрения более абстрактной классификации изучаемых в арифметике взаимоотношений, с одновременным учётом *психологических моментов*, определяющих связь абстрактного с конкретным и характер представлений учащихся.

Решение вопросов, касающихся трактовки выделенных указанным путём элементов, расположения материала, производства подготовительной работы по ознакомлению учащихся с новыми для них приёмами рассуждения и т. д., должно будет явиться уже последней частью такого рода работы, непосредственно предшествующей фактическому составлению соответственного собрания задач.

Насколько нам известно, такая работа ни в одном из указанных направлений никогда не была проделана; между тем намеченный здесь порядок её проведения, несомненно, обеспечивает реальную её осуществимость. Более того, вряд ли можно отрицать необходимость положить в основу составления сборников задач по арифметике, да и не только по арифметике, именно такого рода предварительное исследование. Конечно, провести его можно по-разному, и результаты его не смогут однозначно предопределить ни объём материала, ни детали его оформления, оставляя во всех отношениях ещё достаточный простор для творческой методической работы. Останутся неизбежно и спорные вопросы. Но основа для суждения о роли тех или иных элементов, об их положении в курсе арифметики этим заложена, и можно будет подвергать обсуждению и выносить решения по определённым и отчётливо поставленным вопросам на основе соответственной мотивировки. До сих пор неопределённость, хаотичность, несистематизированная пестрота материала делали практически невозможным ведение сколько-нибудь плодотворного обсуждения важнейших методических проблем в этой области.

§ 6. Таблица простейших элементов, входящих в состав арифметических задач

Изложение окончательных результатов только что охарактеризованного и по самой сути дела довольно кропотливого методологического анализа не входит в задачи настоящей статьи. Мы попытаемся всё же несколько конкретизировать сказанное в § 5, для того чтобы дать здесь более ясное представление о том, какого характера анализ и систематизация имеются в виду.

Так как систематизация материала в основном зависит от двух факторов — арифметической «схемы» и её осуществления в области конкретных взаимоотношений между величинами, то расположение результатов должно в общих чертах отвечать «таблице с двойным входом». Систематизация элементов, скажем, по вертикали, по признаку изменяющегося (вообще говоря усложняющегося) арифметического содержания должна снабжаться — по горизонтали — перечислением и разбором различных конкретных интерпретаций и соответствующим анализом психологических моментов. Помимо этого, необходимо дать и монографическое сопоставление различных задач по вертикали, т. е. сводку тех основных постановок вопроса и приёмов рассуждения, которые относятся к данному конкретному материалу.

Систематизация по вертикали представляется нам в следующем виде (мы не ставим требования, чтобы отдельные пункты не перекрывались друг с другом).

I. Соотношения, связанные с одной скалярной величиной:

1) отношения равенства и неравенства;

2) аддитивные величины; разностное сравнение двух значений величины;

3) увеличение и уменьшение значения величины с помощью действий первой ступени (сложение и вычитание);

4) кратное изменение значения величины: операция умножения;

5) деление на равные части;

6) соотношение между целым и частями целого;

7) кратное сравнение двух значений величины; деление по содержанию;

8) переход от одного значения величины к другому путём деления на равные части и объединения таких частей; общая мера;

9) измерение величин. Единицы меры. Переход от одной системы измерения к другой;

10) понятие отношения двух значений величины. Выражение отношения простой и десятичной дробью и в процентах. Определение отношения по данным значениям величины и одного из значений при данном отношении (части целого и целого по части);

11) сопоставление разностного и кратного сравнения значений величины и совместное их применение. Приращение, выраженное в долях исходного количества и в процентах; его связь с отношением исходного и окончательного значения величины;

12) характеристика частей целого с помощью их отношений к целому и взаимных отношений, процентные отношения. Круговые диаграммы. Среднее арифметическое.

II. Соотношения, связанные с совместным рассмотрением нескольких величин:

1) прямая пропорциональность. Параллелизм аддитивных и кратных изменений. «Приведение к единице»;

2) прямая пропорциональность. Равенство кратных отношений значений двух пропорциональных величин. Пропорции;

3) прямая пропорциональность. Постоянство отношения соответственных значений величин. Коэффициент пропорциональности. Характеристика интенсивности равномерного изменения величины. Удельные характеристики однородных величин. Пропорциональные отрезки;

4) сопоставление аддитивных изменений и кратного сравнения для случаев пропорциональных величин, соответственные свойства пропорций;

5) линейная зависимость. Начальное значение и коэффициент пропорциональности как скорость изменения или удельная характеристика. Исчерпание значения величины путём равномерного изменения;

6) направленные величины с двусторонним изменением. Начальная точка отсчёта. Аддитивные изменения разных знаков;

7) совместное рассмотрение нескольких величин, пропорциональных третьей. Взаимоотношения целого и частей при одном и том же их составе. Сопоставление скоростей изменения

и удельных характеристик. Отношение подобия. Выбор произвольной единицы измерения; сопоставление разностных и кратных отношений;

8) совместное рассмотрение нескольких линейных зависимостей. Сравнение интенсивностей роста. Разностное сравнение двух линейных функций. Типовые задачи, решаемые на основе анализа причинной обусловленности расхождения числовых данных;

9) обратно пропорциональная зависимость между величинами. Измерение в долях целого и с помощью произвольной единицы меры. Прямое и обратное отношения. Применение пропорций. Сложные (составные) единицы. Аддитивные изменения и учёт разностных данных в различных конкретных случаях;

10) сочетание прямой и обратной пропорциональной зависимости нескольких величин;

11) более сложные зависимости. Измерение площадей и объёмов. Нелинейные изменения величин. Таблицы. Графики. Линейная интерполяция. Возрастание и убывание функций. Неограниченное возрастание и убывание;

12) элемент «сложности» в структуре задач. Задачи комплексного типа, их общая классификация и характеристика;

13) элемент «новизны» в структуре задач. Задачи с отличной от обычной постановкой вопроса или методом решения;

14) методологические элементы в решении задач. Характерные образцы синтетического метода рассуждения. Задачи с недостаточным и избыточным количеством данных. Задачи алгебраического содержания; сопоставление алгебраического и арифметического методов решения.

Не приходится и говорить, что этот перечень не является исчерпывающим. Каждый пункт отвечает целому ряду известных типов арифметических задач и подлежит соответственному дальнейшему расчленению как по вертикали, так и по горизонтали.

Так, например, в пункте I.1 (отношения равенства и неравенства) должны найти место вопросы, относящиеся к конкретной интерпретации равенства и неравенства двух дробей (задачи сравнения дробей, расположения их в порядке возрастания), связанные с этим вопросы о равенстве простой и десятичной дробей (например, разъяснение таких соотношений, как $0{,}999\ldots = 1$ и т. п.), приёмы записи различных (малых и больших) чисел с помощью выделения степеней 10, имеющие целью облегчить сопоставление различных числовых данных друг с другом, применение для той же цели процентов и диаграмм, далее изме-

нение (увеличение и уменьшение) дроби при различных изменениях (в том числе и аддитивных) её числителя и знаменателя, упражнения, закрепляющие в сознании учащихся равенства $a : a = 1$ и $a - a = 0$ и т. п.

Аналогично пункт I.11 охватывает, как это сразу ясно, значительное число арифметических задач. Это связано с психологическими моментами. Как показывает практика, как раз одновременный учёт данных разностного и кратного сравнения (больше или меньше «на» и при этом составляет такую-то часть «от» и т. п.) требует большого количества упражнений и усваивается учащимся далеко не сразу.

Задачи на «пропорциональное деление» могут в простейших случаях встретиться уже в п. I.6 и I.12, но также и в п. II.7, II.9 и II.10. Различие здесь связано в известной мере и с моментом прохождения — один и тот же вопрос освещается по-разному и имеющиеся в виду навыки различны. Типовые задачи на движение (путешественники, курьеры) отвечают п. II.5 и II.6 (но и многим другим), задачи на смешение — главным образом п. II.8, задачи на бассейны и совместную работу — п. II.9, II.10.

Во всех случаях имеется в виду — и в этом суть дела — достаточно точная и подробная характеристика того, *что должно быть достигнуто в отношении развития представлений и умственных навыков учащихся в связи с данным пунктом и в применении к какому конкретному материалу*.

Так, например, по второй части п. I.11 можно было бы формулировать требование, чтобы учащийся мог свободно ориентироваться в вопросах, указанных в связи с разбором задачи на смешение воды и спирта в конце § 4, где приведены и требования, отвечающие п. II.9.

Перечислить (по горизонтали) те конкретные величины, которые надлежит принять во внимание, при наличии справочника, о котором шла речь в § 3, не составит труда.

Отметим попутно, что мы стоим за то, чтобы включить в материал арифметических задач простейшие приложения отрицательных чисел и геометрические факты, относящиеся к пропорциональности отрезков и приводящие к табулированным коэффициентам пропорциональности. Точно так же, не отпугивая учащихся тяжеловесным техническим аппаратом традиционного изложения начальных глав элементарной алгебры, следует, на наш взгляд, покончить с ни на чём не основанной боязнью вводить буквенные обозначения при решении арифметических задач

и, соответственно с этим, уже на уроках арифметики знакомить учащихся с *простейшими уравнениями*, решая их «по соображению» на основе известных учащимся арифметических положений. Это кажется нам наиболее простым и целесообразным решением дилеммы, связанной с последним вопросом п. II.14, затронутым нами уже в § 4. Мы придаём также большое значение учёту потребностей смежных дисциплин, физики и химии в первую очередь (п. I.10—12; п. II.3, II.5—11). Недостаточная разработка соответственного материала арифметических упражнений является, на наш взгляд, не только крупнейшим дефектом с точки зрения подготовки учащихся средней школы к практической деятельности, но и влечёт за собой тяжёлые последствия в отношении прохождения математических дисциплин как в средней, так и в высшей школе.

По нашему мнению, изложенное достаточно ясно характеризует то, что мы имеем в виду, говоря о выделении и систематизации простейших элементов, определяющих содержание арифметических задач и подлежащих в настоящее время включению в «арифметический минимум».

Резюмируем вкратце выдвигаемые нами основные принципы отбора, составления и расположения арифметических задач.

Арифметическое содержание задач должно фиксироваться на основе детального и исчерпывающего анализа тех элементов *мышления и воображения* учащихся, развитие которых составляет цель обучения арифметике. Эти элементы определяются, с одной стороны, *функциональным характером и конкретной природой* изучаемых зависимостей между величинами и, с другой стороны, требованием *естественности хода логического рассуждения и конкретной интерпретируемости* соответствующих сопоставлений и действий.

Постановка вопросов в задачах должна быть, как правило, *реальной*, получение ответа *интересным* для учащихся, конкретное оформление (фабула) и подбор числовых данных должны иметь либо *познавательную ценность*, либо *эмоциональную окраску* и расширять *числовой кругозор* учащихся. Решение задач должно воспитывать в учащихся *отчётливые представления* в области изучаемых соотношений, умение применять *нужные математические средства в нужных случаях и ориентироваться* как в часто встречающихся простых, так и в более *сложных и новых* для решающего, но доступных ему арифметических ситуациях.



АРНОЛЬД
Игорь Владимирович
(06.03.1900 — 20.10.1948)

Доктор педагогических наук, профессор. Член-корреспондент АПН РСФСР с 21 февраля 1947 г. Состоял в Отделении методик преподавания основных дисциплин в начальной и средней школе.

Игорь Арнольд родился в г. Харькове в дворянской семье. Его отец и мать имели высшее образование и оба работали земскими статистиками. В связи с болезнью отца в 1908 г. семья выезжает за границу в Швейцарию.

В Швейцарии Игорь Арнольд учится в начальной школе Цюриха. Затем мать с Игорем переезжает в Германию (1912), а в 1913 г. — в Одессу, где Игорь Арнольд учится в четвертой одесской гимназии (1914—1918). В 1918 г. семья получила из-за границы известие о смерти отца.

С 1918 по 1921 г. И. В. Арнольд — студент математического отделения Новороссийского университета. После окончания 3 курса он поступил работать в канцелярию и библиотеку.

В Одессе И. В. Арнольд увлекается лекциями известных профессоров В. Ф. Кагана, Н. Г. Чеботарева (1894—1947) и С. О. Шатуновского (1859—1929). Овладев языками немецким, французским, английским, итальянским и латинским, Игорь Владимирович целиком погружается в изучение мировой математической культуры. Он выступает в университете с докладами методологического характера: «О законе исключенного третьего» (1921), «О внутренней наглядности в математике» (1923).

Перепечатывается из книги: *Андронов И.К.* Полвека развития школьного математического образования в СССР. М.: Просвещение, 1967. С. 128—132.

В 1922—1924 гг. И. В. Арнольд становится преподавателем математики на рабфаках Одесского высшего сельскохозяйственного и Политехнического институтов. Здесь он творчески овладевает методикой рационального обучения математике.

В 1924 г. И. В. Арнольд переезжает в Москву и поступает на 3 курс математического отделения Московского университета. Он окончил университет в 1929 г., защитив дипломную работу на тему «Идеалы в коммутативных полугруппах».

В 1929—1932 гг. Игорь Владимирович — аспирант Научно-исследовательского института при МГУ. Здесь он проявляет большую творческую активность, участвуя в семинаре профессора А. Я. Хинчина по теории чисел и в семинаре по вопросам современной алгебры, который проводила известная алгебраист профессор Эмми Нётер (1882—1935) во время ее пребывания в Москве. Одновременно он участвует в семинаре по методам математики секции естественных наук Комакадемии под руководством профессора С. А. Яновской (1896—1966).

С 1933 г. И. В. Арнольд — ассистент, позднее доцент и, наконец, и. о. профессора математики Физического института МГУ.

Одновременно он начал читать лекции по теории чисел и теоретической арифметике в Московском педагогическом институте имени А. С. Бубнова (ныне им. В. И. Ленина). В 1935 г. И. В. Арнольд был утвержден в ученой степени кандидата физико-математических наук.

В 1941 г. в июне в Ученом совете Московского педагогического института имени А. С. Бубнова он защитил диссертацию на ученую степень доктора педагогических наук по методике математики. Предметом защиты была рукопись «Теоретическая арифметика», 480 с., изданная в 1938 г. в качестве пособия для математических отделений физмата педагогических институтов. В предисловии автор писал: «Изложение теории натурального числа и последовательное проведение операторной точки зрения позволяют, по моему мнению, осветить возникающие в связи с указанной установкой методические вопросы с большей ясностью, нежели это было бы возможно в пределах классических формальных теорий. Кроме того, я считал, что с точки зрения интересов читателя здесь следовало предпочесть проникнутое определенным мировоззрением изложение более, быть может, легкому и менее ответственному сухому перечислению математических фактов. В этих двух обстоятельствах я видел достаточное оправдание для включения указанных выше вопросов и

указанных методов изложения в книгу, предназначенную для заполнения весьма существенного пробела в нашей учебной литературе». До этой работы И. В. Арнольда в России и СССР не было работ по теоретической арифметике, отражающих современные математические идеи, тогда как «Теоретическая арифметика» И. В. Арнольда построена на «множественной идее»; в ней систематически изложена идея развития понятия числа от натурального до кватернионов и гиперкомплексных чисел. В работе особое внимание уделено теории построения действительного числа — по Кантору, по Дедекинду и по Вейерштрассу.

Опираясь на работу И. В. Арнольда «Теоретическая арифметика», курс в педагогических институтах стал преподаваться на более высоком научно-педагогическом уровне. Неудивительно, что в 1939 г. эта книга выходит вторым изданием. В предисловии ко второму изданию сказано: «В 1938 г. была принята новая программа по курсу теории чисел для педвузов, по объему выходящая за пределы двух последних глав, данных в первом издании настоящей книги.. В силу этого оказалось целесообразным выделить эти две главы с соответствующими добавлениями в отдельную книгу «Теория чисел»... В новом издании «Теоретическая арифметика» осталась почти без изменений. Подверглись лишь большей систематизации вопросы аксиоматики числовых систем рациональных и действительных чисел...»

Война 1941 г. заставила И. В. Арнольда уехать с семьей в г. Магнитогорск. Там он стал заведующим кафедрой; там же получил документ о присвоении ему степени доктора педагогических наук по методике математики.

После возвращения в 1944 г. в Москву И. В. Арнольд был избран по конкурсу заведующим кафедрой высшей математики Московского института стали. Одновременно он по совместительству читал лекции на физическом факультете МГУ и был зачислен старшим научным сотрудником Академии педагогических наук. С этого времени И. В. Арнольд вплотную занялся разработкой проблем методики математики. Его работа в этой области в основном связана с постановкой арифметики и алгебры и с более совершенной научно-педагогической подготовкой преподавателей математики.

В 1945 г. на первых выборах в Академию педагогических наук избраны в члены-корреспонденты А. И. Маркушевич, Н. Ф. Четверухин и первый доктор педагогических наук И. В. Арнольд. Ему при выборах была дана яркая характеристика от имени матема-

тиков и педагогов-математиков Москвы профессором С. А. Яновской.

В 1946 г. в 4-м выпуске «Известий АПН» выходит работа И. В. Арнольда «Принципы отбора и составления арифметических задач». В этой работе автор пишет: «Начнем с вопроса, в разрешении которого рутинность проявляется на практике с особенной рельефностью. ...Мы имеем в виду фабулу или оформление задачи, естественность постановки вопроса (в задаче) и подбора числовых данных. Принято считать, что все это имеет второстепенное значение... Отсутствие заботы о фабуле приводит в итоге к нагромождению задач с искусственными, подчас прямо смехотворными условиями, лишь по чисто внешним признакам имеющим реальную оболочку. Хуже всего то, что обилие задач, заставляющих учащегося на протяжении нескольких лет обучения пережевывать один и тот же традиционный материал, неминуемо навевает скуку, переходящую в отвращение к арифметике...» Далее автор дает примеры наивных и ненужных задач, которые вошли в школьную традицию.

Резюмируя, автор говорит: «Основными целями преподавания арифметики в средней школе являются: а) создание у учащихся отчетливых представлений и одновременно закрепление твердых навыков, относящихся к области рациональных операций над рациональными числами; б) ознакомление учащихся с соответствующими элементарными функциональными зависимостями между величинами...

Основными целями решения „текстовых“ арифметических задач... являются:

а) создание и закрепление отчетливых представлений, относящихся к конкретным случаям охарактеризованных только что зависимостей между величинами;

б) воспитание умения ориентироваться в разнообразных возможных соотношениях между данными и искомыми величинами на основе естественного хода логического рассуждения, опирающегося на диктуемые здравым смыслом соображения о взаимной обусловленности соответствующих числовых данных;

в) создание и закрепление навыков составления и оперирования величинами...» И дальше автор дает таблицу простейших элементов, входящих в состав арифметических задач.

В 1946 г. в журнале «Математика в школе» появляется краткая статья И.В. Арнольда «О задачах по арифметике», в которой он излагает свое педагогическое исследование. Еще дальше в

Большой советской энциклопедии появляются отдельные статьи И.В. Арнольда на термины: «Число», «Умножение» и в Малой советской энциклопедии — «Алгебра».

В 1947 г. в № 4 «Известий АПН» помещена работа И.В. Арнольда «Операторное истолкование числа в курсе элементарной математики». Автор статьи приходит к заключению:

«1) Для устранения целого ряда существеннейших дефектов (рассмотренных выше) в преподавании элементарной арифметики и алгебры и для создания естественной координации между формальным математическим аппаратом и конкретными представлениями учащихся необходимо и целесообразно в вопросах, касающихся операций умножения и деления дробей и отрицательных чисел, а также в изложении теории комплексных чисел, теории действий над радикалами и дробными показателями и в изложении теории логарифмов вести преподавание в тесной связи с конкретным операторным истолкованием чисел. В этом направлении следует переработать соответствующие отделы во всех стандартных учебных пособиях, включая и сборники упражнений.

2) Для устранения из учебного обихода случайно ставших традиционными, чуждых русскому языку оборотов речи, крайне затрудняющих преподавание, следует ввести в начальной стадии преподавания в качестве стандартного способа запись множителя на первом, а множимого на втором месте...»

В 1947 г. появляется в издании АПН в серии «Педагогическая библиотека учителя» работа И. В. Арнольда «Отрицательные числа в курсе алгебры». В работе содержится:

§ 1. Введение, в котором показаны психологические трудности, испытываемые учащимися при традиционном формальном введении учения об отрицательных числах.

§ 2. Повышение теоретического уровня, доступного учащимся при изучении раздела теории отрицательных чисел.

В § 3 автор обращает особое внимание на мотивировку определений с помощью принципа перманентности; в § 4 и 5 автор конкретизирует истинный смысл введения отрицательных чисел; в § 6 положительные и отрицательные числа рассматриваются как характеристики изменения величин. Такое представление о числах было впервые введено в методику А. Н. Шапошниковым и разработано в учебнике «Начальной алгебры» П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова. § 7 дает конкретное истолкование правил знаков при умножении чисел.

Далее обращено внимание на методику изложения учения об отрицательных корнях уравнения и отрицательных показателях. Основное внимание И. В. Арнольда направлено на то, чтобы сделать введение в мышление учащихся идеи отрицательного числа убедительным, показав целесообразность и научную пользу этого понятия, а также на то, чтобы усвоение этих понятий учениками было сознательным.

Последней работой И. В. Арнольда явилась его методическая статья «Показатели степени и логарифмы в курсе элементарной алгебры» (1948). В ней автор систематически развивает учение о показательной и логарифмической функции, дав методически последовательное и обоснованное изложение темы: от введения показателей он рекомендует сделать скачок к новой ступени абстракции — введению дробных показателей, затем, объяснив необходимую теорию действительного числа, переходить к понятию предела последовательности чисел и на этой базе строить учение о показательной функции, а от нее идти к логарифмам.

Коротка была жизнь замечательного ученого — методиста математики: три года (1945—1948), когда он вплотную занялся этими вопросами, оставили яркий след в развитии передовых идей в методике. Перегрузка занятиями вызвала переутомление, И. В. Арнольд надорвал свое здоровье и попал в больницу. Он умер, оставя незавершенной часть своих работ.

Игорь Владимирович Арнольд

ПРИНЦИПЫ ОТБОРА И СОСТАВЛЕНИЯ
АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Подписано в печать 10.10.2008 г. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Печ. л. 3. Тираж 1000 экз.
Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (499)241–74–83.

Отпечатано в ООО «Типография „САРМА“»
